CONJUNTO DE NUMEROS ENTEROS

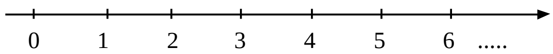
INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

La primera consideración sobre el número entero negativo no llega en el mundo occidental sino hasta el siglo XVI como consecuencia de la solución de ecuaciones algebraicas. En oriente, en cambio, durante el siglo IV ya manipulaban números positivos y negativos en los ábacos usando bolas de diferentes colores.

El matemático alemán Kronecker afirmó: “El número natural lo creó Dios y todo lo demás es obra de los hombres”. Si nos remitimos a tiempos remotos podemos encontrar que nuestros antepasados utilizaban los números, según su necesidad, cuál era el contar los animales que poseían, la cantidad de grano que almacenaban, etc. para lo cual era suficiente el conjunto de los números naturales. Posteriormente el hombre ha ido ampliando sus necesidades en la utilización de los números y se ha visto en la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales, como veremos más adelante.

JUSTIFICACIÓN PARA LA EXTENSIÓN DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Por lo aprendido, en el módulo anterior: N = {0; 1; 2; 3; 4; 5;........}; cuya representación en la semirecta es:



También, quedó establecido que las operaciones de adición y multiplicación siempre son posibles en N (definidas en N), esto es:

Sin embargo, la operación de sustracción existe solamente en una forma muy restringida, es decir sólo cuando el minuendo es mayor o igual que el sustraendo, y por lo tanto la sustracción no verifica la clausuratividad en N. Por ejemplo:

Propiedad de Clausura o cerradura:

$\forall$ a; b $\in$ N $\Rightarrow$ (a + b) $\in$ N

$\forall$ a; b $\in$ N $\Rightarrow$ (a . b) $\in$ N

15 – 7 = 8; 8 $\in$N $\Rightarrow$ M > S

12 – 12 = 0; 0 $\in$ N $\Rightarrow$ M = S

21 – 36 = x; x $\notin$ N $\Rightarrow$ M < S

Se concluye:

- Con el conjunto de los números naturales (N), no es suficiente para realizar todas las operaciones.
- Para que la sustracción siempre sea posible se hace necesario extender o ampliar el conjunto N a otro conjunto de números en el cual la sustracción sea clausurativa.

- Se construye un nuevo conjunto de números que incluye al conjunto N. Cumpliéndose en este nuevo conjunto las operaciones y propiedades de los naturales.

  Además en este conjunto se establecen otras propiedades con las que será posible ampliar el campo operatorio.

- Este nuevo conjunto de números se denomina conjunto de los números enteros, cuya notación es Z.

1. CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Veamos los siguientes ejemplos:

$37 - 29 = 8 \quad \Rightarrow \quad 37 = 8 + 29$

$25 - 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad 25 = 25$

$12 - 56 = -44 \quad \Rightarrow \quad 12 = -44 + 56$

1.1. Conjunto de los números enteros positivos

Al conjunto de los números enteros positivos se denota por Z^+, siendo sus elementos las diferencias de números naturales (a-b), tales que a > b.

NOTACIÓN POR COMPRENSIÓN

$$Z^+ = \{a-b/a;\, b \in N \wedge a > b\}$$

NOTACIÓN POR EXTENSIÓN

$$Z^+ = \{\ {}^+1; {}^+2; {}^+3; {}^+4; {}^+5; \ldots\ldots.\ \}$$

NOTACIÓN POR CONVENIO MATEMATICO

$$Z^+ = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots.\}$$

1.2. Conjunto unitario, elemento cero.

Este conjunto tiene como elemento al número cero (0), que se obtiene de la diferencia de números naturales (a-b), tales que a = b.

$$\{0\} = \{a-b/a;\, b \in N \wedge a = b\}$$

El número entero cero no es positivo ni negativo, es decir:

$$0 \notin Z^+$$

$$0 \notin Z^-$$

1.3. Conjunto de los números enteros negativos

NOTACION POR COMPRENSIÓN

$$Z^{-} = \{a-b / a; b \in N \wedge a < b\}$$

NOTACIÓN POR EXTENSIÓN

$$Z^{-} = \{ \ldots; {}^{-}4; {}^{-}3; {}^{-}2; {}^{-}1; \}$$

1.4. Conjunto de los números enteros

Al conjunto de los números enteros se denota por Z, siendo sus elementos todas las diferencias de números naturales, es decir, la reunión de los conjuntos antes mencionados, cuya notación son:

POR COMPRENSIÓN

$$Z = Z^{-} \cup \{0\} \cup Z^{+}$$

POR EXTENSIÓN

$$Z = \{ \ldots ; {}^{-}3; {}^{-}2; {}^{-}1; 0; {}^{+}1; {}^{+}2; {}^{+}3; ; \ldots \}$$

COROLARIO

Los números naturales forman un subconjunto de los números enteros. Luego:

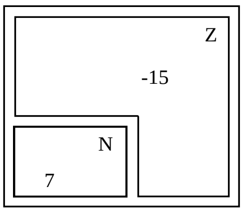
$$\boxed{N \subset Z}$$

Todo número natural es entero, pero no todo número entero es natural. Ejemplo:

$$7 \in N \wedge 7 \in Z$$

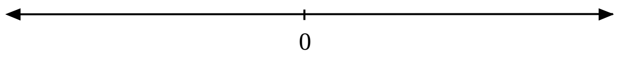
$$-15 \in Z \wedge -15 \notin N$$

REPRESENTACIÓN GRAFICA DE Z

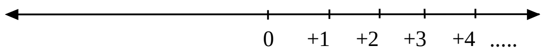


2. REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS EN LA RECTA NUMÉRICA

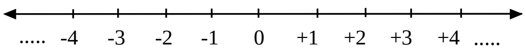
Se elige en la recta numérica un punto de origen, el que se le hace corresponder el número entero cero.



A la derecha de cero se ubican a distancias iguales, los números enteros positivos.

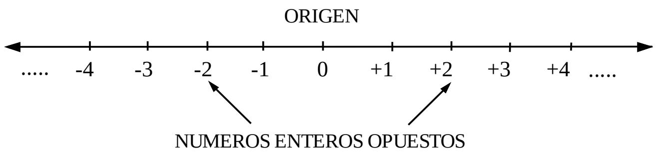


A la izquierda de cero se ubican a distancias iguales, los números enteros negativos.



3. NUMEROS ENTEROS OPUESTOS

Establecida la correspondencia de cada número entero, con un punto de la recta, se observa que los números enteros simétricos u opuestos ^{+}Z y ^{-}Z , equidistan de cero (expresan igual distancia al origen).



$\Rightarrow$ -2 y 2 son # Z opuestos.

4. VALOR ABSOLUTO: | |

El valor absoluto de un número es la distancia de dicho número al origen.

|a| $\Rightarrow$ se lee: valor absoluto de a.

Recuerda

$$|a| = \begin{cases} a \ ; \text{si: } a > 0 \\ 0 \ ; \text{si: } a = 0 \\ -a ; \text{si : } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

|7| = 7; (7 > 0)

|0| = 0

|-7| = 7; (-7 < 0)

De los ejemplos se concluye:

$|a|$ nunca es un número negativo.

$|a|$ es mayor o igual que cero.

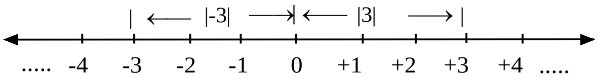
$|a| \geq 0$

4.1. APLICACIONES

1) Si $|x| = 3$, a qué números enteros representa x ?

Solución:

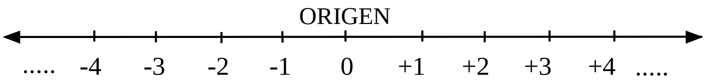
X es un número que dista 6 unidades del origen. Luego: X = {- 3; 3}



2) Si $|x| < 5$, a qué números enteros representa X?

Solución:

X representa a todos los números enteros cuyas distancias al origen son menores que cinco.

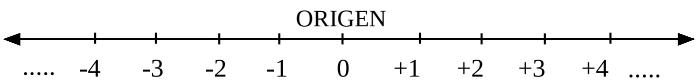


Del gráfico: X = {-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4}

3) Cuando afirmamos que $|X| \leq 5$, a qué números enteros representa X?

Solución:

X representa a todos los números enteros cuyas distancias al origen son iguales o menores que 5.

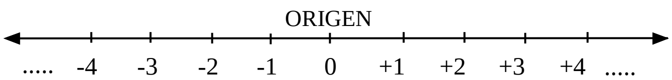


Del gráfico: X = {-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5}

4) Si $|X| > 2$, a qué números enteros representa X?

Solución

X representa a todos los enteros cuyas distancias al origen son mayores que 2.

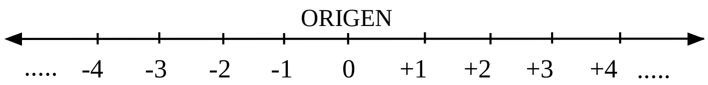


Del gráfico: X = {.....; -5; -4; -3; 3; 4; 5; .....}

5) Cuando afirmamos que $|X| \geq 2$. ¿A qué números representa X?

Solución

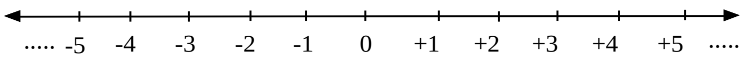
X representa a todos los enteros cuyas distancias al origen son mayores o iguales que 2.



Del gráfico: X = {.....; -4; -3; -2; 2; 3; 4; .....}

5. COMPARACION ENTRE NUMEROS ENTEROS

En la recta numérica para los números enteros:



De aquí se deducen las siguientes propiedades de comparación entre números enteros:

Propiedad 1: Cualquier número positivo es mayor que cero.

Propiedad 2: Cualquier número negativo es menor que cero.

Propiedad 3: Cualquier número positivo es mayor que cualquier número negativo.

Ejemplo: +1 > -1 000 000.

Propiedad 4: De dos números positivos es mayor el que tiene mayor valor absoluto.

Ejemplo: +50 > +12

Propiedad 5: De dos números negativos es mayor el que tiene menor valor absoluto.

Ejemplo: -16 > -58.

Escribe los símbolos <, = , > en el espacio que corresponde.

+127 .... +132	+127 .... +132
+19 .... +7	|-7| .... |7|
-11 0	-27 .... -38
0 .... -16	-124 .... -178
8 .... -26	-18 18

PRÁCTICA DE CLASE

A continuación proponemos una serie de ejercicios que te permitirán plasmar lo aprendido en la sesión. ADELANTE.

01. Colocar verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

$-3 \in N$	( )
$5 \in N$	( )
$N \subset Z$	( )
$-8 \subset Z$	( )
$7 \in Z$	( )
$0 \in Z$	( )

02. Ordenar de menor a mayor:

–104; -26; -5; 0; -1; +1; +3; +30; -60; -24...

03. Ordenar en forma decreciente.

–26; -32; -5; 0; -1; +1; +3; +30; +19..

04. Determine el valor absoluto de:

$\lvert -5 \rvert =$	....	$\lvert +5 \rvert =$	....
$\lvert -7 \rvert =$	....	$\lvert 0 \rvert =$	....
$\lvert -50 \rvert =$	....	$\lvert -16 \rvert + \lvert -5 \rvert =$	....
$\lvert -7 \rvert - \lvert 3 \rvert =$	....	$\lvert -233 \rvert + \lvert +10 \rvert =$	....

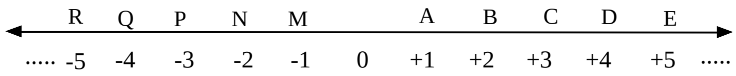
05. Escribir 6 pares de números opuestos:

a) ....   b) ....

c) ....   d) ....

e) ....   f) ....

06. En la recta numérica:



Suponiendo que cada espacio mide 1 centímetro, entonces la distancia del punto:

D a cero es .... R es acero es ....

M a cero es .... B es acero es ....

E a cero es .... Q a cero es ....

07. Dado |X| = 5. ¿Qué números enteros representa X? ¿Por qué?

08. Si |X| < 4. ¿A qué números enteros representa X? ¿Por qué?

09. Si |X| > 6. ¿A qué números enteros representa X? ¿Por qué?

10. Escribe el signo >, = ó <. Según corresponda en los espacios punteados.

a) –15 .... -7 | g) |-5| .... |5|

b) 20 .... +20 | h) |-12| .... |-18|

c) 12 .... -12 | i) |-15| .... |+12|

d) -32 .... 20 | j) 0 .... -9

e) –1 .... 0 | k) -32 .... -1

f) 0 .... 11 | l) |0| .... |-3|

EJERCICIOS

01. Dados los siguientes números enteros: -5 ; -12 ; -1 ; -18. determine el mayor de ellos.

a) -18 b) -5 c) -12 d) -1

02. Dados los siguientes números enteros determine el menor de ellos:

-8 ; -123 ; -15 ; -1

a) -123 b) -15 c) -8 d) -1

03. Luego de ordenar los siguientes números enteros, determine el que ocupa el lugar central: -8 ; 5 ; -2 ; -3 ; -9 ; 12 ; -18

a) -2 b) -3 c) 5 d) -8

04. Si |x| = 3 ¿Cuántos valores puede tomar “x”?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

05. Si |x-5| = 3 determine el menor valor que puede tomar "x".

a) 8 b) 3 c) 2 d) -8

TAREA

01. Ordenar de menor a mayor:

a) 10 ; -1 ; -8 ; +4 ; +7 ; -6 ; -9 b)–12 ; 13 ; +14 ; -7 ; -10 ; -1 ; 0

02. Ordenar en forma decreciente.

a) –4 ; -8 ; -13 ; 0 ; -7 ; +7 ; +16 ; -1

03. Si $|X| \geq 4$. ¿A qué números enteros representa X? ¿Por qué?

04. Si $|X| \leq 3$. ¿A qué números enteros representa X? ¿Por qué?

05. Si $|X| = 6$. ¿A qué números enteros representa X? ¿Por qué?

06. Si $|X| < 5$. ¿A qué números enteros representa X? ¿Por qué?

07. Si $|X| > 4$. ¿A qué números enteros representa X? ¿Por qué?

08. ¿Aplicando las propiedades de la Igualdad y Desigualdad, escribir la conclusión en cada proposición?

a) Si: a = b y b = c. Se concluye: ....

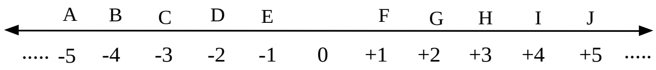
b) Si: -8 < -2 y -2 < 5. Se concluye: ....

c) Si: -1 > -2 y -2 > -3. Se concluye: ....

09. Escribe los símbolos <, =, > en el espacio que corresponde:

a) -15^2	....	0	g) $\lvert 15\rvert$	....	$\lvert -15\rvert$
b) 2^2	....	4	h) $\lvert -21\rvert$	....	$\lvert -8\rvert$
c) 5	....	-60/-12	i) $\lvert -1\rvert$	....	$\lvert 2\rvert$
d) –32	....	23	j) 53	....	-999
e) 0^3	....	81^0	k) -39	....	2
f) 0	....	-58	l) $\lvert 10\rvert$	....	$\lvert -31\rvert$

10. En la recta numérica:



Suponiendo que cada espacio mide 1 centímetro, entonces la distancia del punto:

E a cero es	....	H a cero es	....
I a cero es	....	B a cero es	....
A a cero es	....	J a cero es	....
E al punto J	....	C al punto F	....
F al punto J	....	A al punto J	....
B al punto H	....	C al punto I	....