TEORIA DE LA DIVISIBILIDAD

Definición. - Es la parte de la Aritmética que estudia las condiciones que debe tener un número para ser divisible entre otro. Estas condiciones se denominan caracteres o Criterios de Divisibilidad.

NÚMEROS DIVISIBLES ENTRE SI.-

Se dice que un número A es divisible entre otro número B cuando el residuo de dividir A entre B es CERO y el cociente es entero. Se dice entonces que A es múltiplo de B o que B es un divisor de A.

PRINCIPIOS DE LA DIVISIBILIDAD:

01. Operaciones entre múltiplos

a) $\boxed{\overset{o}{n}+\overset{o}{n}=\overset{o}{n}}$

Ejm: $36 + 45 = 81$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overset{o}{9} & + & \overset{o}{9} & = & \overset{o}{9} \end{array}$$

b) $\boxed{\overset{o}{n}-\overset{o}{n}=\overset{o}{n}}$

Ejm : $72 - 16 = 56$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overset{o}{8} & - & \overset{o}{8} & = & \overset{o}{8} \end{array}$$

c) $\boxed{\overset{o}{n} x k=\overset{o}{n}}$

Ejm : $48 \ x \ 5 = 240$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overset{o}{6} & x & 5 & = & \overset{o}{6} \end{array}$$

d) $\boxed{\left(\overset{o}{n}\right)^k=\overset{o}{n}}$

Ejm : $6^4 = 1296$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \left(\overset{o}{3}\right)^4 & = & \overset{o}{3} \end{array}$$

02. Los Números no Múltiplos :

a) División Inexacta por Defecto :

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

$$\boxed{D = \overset{\circ}{d} + r}$$

b) División Inexacta por exceso :

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} r' & q' \end{array}$$

$$\boxed{D = \overset{\circ}{d} - r'}$$

Ejemplos:

$$\begin{array}{l|l} 61 & 9 \\ \cline{2-2} 7 & 6 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} 61 & 9 \\ \cline{2-2} 2 & 7 \end{array}$$

$$\boxed{61 = \overset{\circ}{9} + 7} \qquad\qquad \boxed{61 = \overset{\circ}{9} -2}$$

03.

$$\boxed{\begin{array}{l} N = \overset{\circ}{a} \\ N = \overset{\circ}{b} \end{array} \Rightarrow N = \overset{\circ}{\overline{MCM(a, b)}}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} N = \overset{\circ}{a} + r \\ N = \overset{\circ}{b} +r5 \end{array} \Rightarrow N = \overset{\circ}{\overline{MCM(a, b)}} + r}$$

Ejemplos :

$$\boxed{\begin{array}{l} N = \overset{\circ}{8} \\ N = \overset{\circ}{12} \end{array} \Rightarrow N = \overset{\circ}{\overline{MCM(8,12)}} = \overset{\circ}{\overline{24}}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} N = \overset{\circ}{20} + 5 \\ N = \overset{\circ}{32} + 5 \end{array} \Rightarrow N = \overset{\circ}{\overline{MCM(20,30b)}} +5 = \overset{\circ}{\overline{60}} + 5}$$

04. PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES:

Dos números enteros cuyo producto es divisible por un cierto módulo, si uno de tales números no admite divisores comunes con el módulo, aparte de la unidad, entonces el otro número será divisible por dicho módulo.

Ejemplo 1: 8n = 9 $\Rightarrow$ n = 9

Ejemplo 2: $21.b = \overset{0}{35}$

$(7x3).b = 7x5xk$

$3.b = \overset{0}{5}$

$b = \overset{0}{5}$

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

1. **Divisibilidad por 2:** Un número es divisible por 2 si su última cifra es cero o número par.

   1<u>2</u>; 2<u>8</u>; 3<u>6</u>; 45<u>6</u>; 1234567<u>8</u> son divisibles por 2 pues su última cifra es un número par.

2. **Divisibilidad por 4:** Un número es divisible por 4 si el número formado con sus dos última cifras es múltiplo de 4.

   1<u>12</u>; 1<u>28</u>; 123<u>00</u>; 4<u>56</u>; 246<u>80</u>; 123456<u>88</u> son divisibles por 4 pues las dos últimas cifras son múltiplos de 4.

3. **Divisibilidad por 8:** Un número es divisible por 8 si el número formado con sus tres última cifras es múltiplo de 8.

   1<u>12</u>; 1<u>28</u>; 123<u>00</u>; 4<u>56</u>; 246<u>80</u>; 123456<u>88</u> son divisibles por 4 pues las dos últimas cifras son múltiplos de 4.

   En términos generales podemos afirmar que un número es múltiplo de 2^n si el número formado por sus "n" últimas cifras es múltiplo de 2^n.

4. **Divisibilidad por 5:** Un número es divisible por 5 si su última cifra es 5 ó 0.

   35; 125; 1230; 455; 12345; 24680 son divisibles por 5, pues la última cifra es 5 ó 0.

5. **Divisibilidad por 25:** Un número es divisible por 25 si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 25 ó 00.

   Ejemplos:

   3<u>25</u>; 1<u>25</u>; 4<u>75</u>; 1234<u>50</u>; 2468<u>25</u> son divisibles por 25 pues el número formado con sus 2 últimas cifras son múltiplos de 25 ó son 'ceros".

En términos generales podemos afirmar que un número es múltiplo de 5^n si el número formado por sus "n" últimas cifras es múltiplo de 5^n.

6. **Divisibilidad por 3:** Un número es divisible por 3 si la suma de todas sus cifras es un número múltiplo de 3.

   Ejemplos:

   12 es divisible por 3 pues 1+2 = 3 .

   234 es divisible por 3 pues 2+3+4 = 9

   5775 es divisible por 3 pues 5+7+7+5 = 24.

7. **Divisibilidad por 9:** Un número es divisible por 9 si la suma de todas sus cifras es un número múltiplo de 9.

   72 es divisible por 9 pues 7+2=9.

   234 es divisible por 9 pues 2+3+4 = 9.

   5445 es divisible por 9 pues 5+4+4+5=18.

8. **Divisibilidad por 7:** número es divisible por 7 si de derecha a izquierda y cifra por cifra se multiplique por los factores: 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, ... y así sucesivamente; luego efectuamos la suma algebraica debemos obtener cero o múltiplo de 7.

Si $\overline{a\ b\ \ c\ d\ e\ \ f\ g\ h} = \overset{o}{7}$ entonces

$$\begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \multicolumn{2}{c}{\underbrace{3\quad 1}_{(+)}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{2\quad 3\quad 1}_{(-)}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{2\quad 3\quad 1}_{(+)}} \end{array}$$

(h + 3g + 2f) –(e + 3d + 2c) + (b + 3a) = $\overset{o}{7}$

OTRA FORMA:

Un número es divisible por 7 si al número se le quita y resta la última cifra multiplicado por 2 así sucesivamente y al final se debe de obtener un múltiplo de 7.

Ejemplos:

1582 es divisible por 7 pues:

Separamos la ultima cifra 2 y le restamos el doble

158 - **2**(2) = 154; hacemos lo mismo:

15 - **2**(4) = 7; y como 7 es divisible por 7; entonces 1582 es divisible por 7.

9. Divisibilidad por 11: Un número es múltiplo por 11 si la diferencia de la suma de las cifras de orden impar y la de orden par es múltiplo de 11.

Es decir:

Sea $N = \overline{a\ b\ c\ d\ e\ f}$; es divisible por 11 sí

a b c d e f

Suma de cifras de orden par: a + c + e

Suma de cifras de orden impar: b + d + f

luego se tiene:

$(a + c + e) - (b + d + f) = \overset{0}{11}$

123 464 es divisible por 11 pues:

$1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 4 \Rightarrow (1+3+5) - (2+4+4) = 0$

72567 es divisible por 11; pues:

(7+5+7) - (2+6) = 11.

10. Divisibilidad por 13: Un número es divisible por 13 si de derecha a izquierda y cifra por cifra se multiplique por los factores: 1, -3, -4, -1, 3, 4, 1, -3, ... y así sucesivamente; luego efectuamos la suma algebraica debemos obtener cero o múltiplo de 13.

$$\text{Si}\quad \begin{array}{cccc} \overline{a} & \overline{b\ c\ d} & \overline{e\ f\ g} & \overline{h} \\ \downarrow & \downarrow\ \downarrow\ \downarrow & \downarrow\ \downarrow\ \downarrow & \downarrow \\ \underbrace{3}_{(-)} & \underbrace{1\ \ 4\ \ 3}_{(+)} & \underbrace{1\ \ 4\ \ 3}_{(-)} & 1 \end{array} = \overset{o}{13}$$

entonces

$h - (3g + 4f + e) + (3d + 4c + b) - 3a = \overset{o}{13}$

OTRA FORMA

Un número es divisible por 13 si al número se le quita y resta la última cifra multiplicado por 9 así sucesivamente y al final se debe de obtener un múltiplo de 13.

* 91 es divisible por 13 pues 9 - **9**(1) = 0.

* 2665 es divisible por 13 pues:

Separamos la ultima cifra 5 y le restamos 9 veces al número que queda:

266 - **9**(5) = 221; hacemos lo mismo:

22 - **9**(1) = 13; y como 13 es divisible por 13; entonces 2665 es divisible por 13.

11. **Divisibilidad por 17:** Un número es divisible por 17 si al número se le quita y resta la última cifra multiplicado por 5 así sucesivamente y al final se debe de obtener 0 ó un divisible de 17.

   * 51 es divisible por 17 pues 5 - **5**(1) = 0.

   * 2465 es divisible por 17 pues:

     Separamos la ultima cifra 5 y le restamos 9 veces al número que queda:

     246 - **5**(5) = 221; hacemos lo mismo:

     22 - **5**(1) = 17; y como 17 es divisible por17; entonces 2 465 es divisible por 17

PRÁCTICA

Actividad: Debes desarrollar en tu cuaderno.

01. Clasifique usted como verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:

a) 30 es múltiplo de 3. (   )

b) 28 es múltiplo de 6. (   )

c) 0 es múltiplo de 7. (   )

d) 308 es múltiplo de 4. (   )

e) 111 es divisible por 3. (   )

f) 1050 es divisible por 125. (   )

g) 4 + 6 es un número par. (   )

h) 15 – 11 es un número impar. (   )

02. Responda a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué es la divisibilidad?

b) ¿Qué entiende por criterios de divisibilidad?.

c) ¿Puede un número ser divisible por 10 y no por 5?, ¿Por qué?

d) El producto de 6 x 30 x 5, es divisible por 4?, ¿Por qué?.

06. Completa una tabla y además marca con una aspa los casilleros respectivos (la flecha se lee "es divisible por")

↗	2	3	4	5	6	7	8	9	11
18									
21									
33									
25									
17									
125									
485									
521									
127									
130									
333									

07. Conteste lo siguiente:

a) ¿Cuál es el menor número de tres dígitos que es divisible por 2; 3 y 5?

b) ¿Cuál es el menor dígito que debe escribirse a la derecha de 752 para que resulte un número divisible por 3; 4 y 11?

c) Cambia el orden de los dígitos del número 4370 a fin de que resulte un número divisible por 2; 4; 5 y 11.

d) ¿Cuál es el menor número que debe restarse de 4370 a fin que resulte un número divisible por 9?

e) ¿Cuál es el menor número que debe aumentarse a 2573 para que el resultado sea divisible por 8?

08. Considerando los números siguientes: 116; 204; 380; 465; 720; 657; 1080;453 y 2346. Indica lo siguiente:

a) ¿Cuáles son divisibles por 2?

b) ¿Cuáles son divisibles por 7?

c) ¿Cuáles son divisibles por 11?

d) ¿Cuántos son divisibles por 5?

e) ¿Cuántos son divisibles por 8?

09. Desarrolle los siguientes planteamientos:

a) Determinar una pareja (a; b) si: $\overline{2ab80}$ es múltiplo de 72.

b) Determinar una pareja (a; b) si: $\overline{a96b4}$ es múltiplo de 12.

EJERCICIOS

01. La suma: $\overline{ab}+\overline{ba}$ es siempre divisible por:

a) 1 y 9 b) 1 y 11 c) 2 y 8 d) 1 y 99 e) N.a.

02. La diferencia: $\overline{ab}-\overline{ba}$ es siempre divisible por:

a) 1; 3 y 9 b) 3; 9 y 11 c) 9 y 11 d) sólo 9 e) N.a.

03. La diferencia: $\overline{abc}-\overline{cba}$ es siempre divisible por:

I) 2 II) 3 III) 1 IV) 9 V) 11 VI) 7

Son ciertas:

a) sólo I, II y III b) sólo II, IV, y VI c) sólo II, III y V

d) todas excepto I y Vi e) Todas

04. El producto de 3 números consecutivos es siempre múltiplo de:

a) 1; 2; 3 y 4 b) 2; 3; 4; 5 y 6 c) 1; 2; 3; y 6 d) 2 y 5 e) 1; 3; 7 y 11

05. El número de la forma $\overline{a(3b)(2a)}$ es siempre divisible por:

a) 1; 2; 3 y 4 b) 1; 2; 3 y 5 c) 1; 2; 3 y 6 d) 1; 2; 3; 4; 6 e) N.a.

TAREA

01. El producto de dos números consecutivos es siempre divisible por:

02. El número de la forma $\overline{(3a)(4a)}$ es siempre divisible por:

03. ¿Cuál es le valor de "a" para que $\overline{3253a}$ sea divisible por 8?

04. Hallar el mayor valor de "a" para que $\overline{3a2a5}$ sea divisible por 3.

05. Hallar "x" en: $\overline{2x969} = \overset{\circ}{7}$